離散数学レポート

010119:大和谷 潔

平成 12 年 7 月 18 日

問題 1

次を示せ。

1. $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$
2. $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

解答

(1) まず、$Ha = Hb \Rightarrow ab^{-1} \in H$ を示す。
H が群であることより、$1 \in H$
よって、$a = 1 \cdot a \in Ha$
$Ha = Hb$ であるので、$a \in Hb$
ある $h \in H$ に対して $a = hb$
両辺に右から b^{-1} をかけて、$ab^{-1} = hbb^{-1} = h \in H$
よって、$ab^{-1} \in H$
つぎに、$ab^{-1} \in H \Rightarrow Ha = Hb$ を示す。
任意の $h \in H$ について、

$$ha = ha \cdot 1 = hab^{-1}b = h(ab^{-1})b$$

ここで $ab^{-1} \in H$ であり、H が群であることから $h(ab^{-1}) \in H$
よって $ha \in Hb$ となるので、$Ha \subset Hb$
同様に、

$$hb = hb \cdot 1 = hba^{-1}a = h(ba^{-1})a$$

ここで、$(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$ であり、H が群であることから $h(ba^{-1}) \in H$
よって $hb \in Ha$ となるので、$Hb \subset Ha$
よって $Ha = Hb$
(2) (1) と同様に、まず $aH = bH \Rightarrow a^{-1}b \in H$ を示す。

$1 \in H$ より、$b = b \cdot 1 \in bH = aH$
よって、ある $h \in H$ が存在して $b = ah$
両辺に左から a^{-1} をかけて $a^{-1}b = a^{-1}ah = h \in H$
つぎに $a^{-1}b \in H \Rightarrow aH = bH$ をしめす。
任意の $h \in H$ について、

$$bh = 1 \cdot bh = aa^{-1}bh = a(a^{-1}b)h$$

ここで、$a^{-1}b \in H$ であり、H が群であることから $(a^{-1}b)h \in H$
よって $bh \in aH$ となるので、$bH \subset aH$
同様に、

$$ah = 1 \cdot ah = bb^{-1}ah = b(b^{-1}a)h$$

ここで、H が群であることと $a^{-1}b \in H$ より、$(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$ であるので、$(b^{-1}a)h \in H$
よって $ah \in bH$ となるので、$aH \subset bH$
よって $aH = bH$

問題２

G を群とし、$G \ni a, b$ に対し、

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

となることを示せ。

解答

左逆元であることを示す。

$$\begin{aligned}(b^{-1}a^{-1})ab &= b^{-1}(a^{-1}a)b \\ &= b^{-1}1b \\ &= b^{-1}b \\ &= 1\end{aligned}$$

右逆元であることを示す。

$$\begin{aligned}ab(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1} \\ &= a1a^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

問題３

G の H による右分解を

$$G = \sum Ha_i$$

とするとき、

$$\sum a_i^{-1}H$$

は H による左分解を与えることを示せ。

解答

$x \in a_i^{-1}H$ とすると、ある $h \in H$ によって $x = a_i^{-1}h$ と表せるが、$a_i^{-1}, h \in G$ であり、G は群であって $\cdot$ で閉じているので

$$x = a_i^{-1}h \in G$$

よって

$$\sum a_i^{-1}H \subset G$$

つぎに

$$\sum a_i^{-1}H \supset G$$

を示す。

(あきらめ)

最後に

$$a_i^{-1}H \cap a_j^{-1}H = \phi$$

を背理法で示す。

$$a_i^{-1}H \cap a_j^{-1}H \neq \phi$$

と仮定すると、ある $h, h' \in H$ について

$$a_i^{-1}h = a_j^{-1}h'$$

両辺の逆元をとると、

$$(a_i^{-1}h)^{-1} = h^{-1}a_i = h'^{-1}a_j = (a_j^{-1}h')^{-1}$$

H は群であるから $h^{-1}, h'^{-1} \in H$ であり、
$h^{-1}a_i \in Ha_i$ かつ $h^{-1}a_i = h'^{-1}a_j \in Ha_j$ となる。よって

$$Ha_i \cap Ha_j \supset \{h^{-1}a_i\} \neq \phi$$

となり、$G = \sum Ha_i$ に矛盾する。

問題4

1. Z において $5Z$ が部分群になることを示せ。
2. $Z/5Z$ の群演算をつくれ。

解答

(1)

$(5Z, +, 0)$ が部分群であることを示すためには、$x, y \in 5Z \Rightarrow xy^{-1} \in 5Z$ であることを示せばよい。

$5n, 5m \in 5Z$ とすると、

$$5n + (5m)^{-1} = 5n + (-5m) = 5(n-m) \in 5Z$$

であるので、$(5Z, +, 0)$ は部分群となる。

(2)

$+$	$5Z$	$5Z+1$	$5Z+2$	$5Z+3$	$5Z+4$
$5Z$	$5Z$	$5Z+1$	$5Z+2$	$5Z+3$	$5Z+4$
$5Z+1$	$5Z+1$	$5Z+2$	$5Z+3$	$5Z+4$	$5Z$
$5Z+2$	$5Z+2$	$5Z+3$	$5Z+4$	$5Z$	$5Z+1$
$5Z+3$	$5Z+3$	$5Z+4$	$5Z$	$5Z+1$	$5Z+2$
$5Z+4$	$5Z+4$	$5Z$	$5Z+1$	$5Z+2$	$5Z+3$