# 離散数学レポート

010119:大和谷 潔

平成 12 年 7 月 25 日

### 問題 1

$f : G \to G'$ を準同型写像とするとき

$$f(1_G) = 1_{G'}$$

であることを示せ。

### 解答

$f$ が準同型写像であるので、任意の $a \in G$ に対して、

$$f(1_G) = f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G) \cdot f(1_G)$$

右から $f(1_G)^{-1}$ をかけると、

$$f(1_G) \cdot f(1_G)^{-1} = 1_{G'}$$

および

$$f(1_G) \cdot f(1_G) \cdot f(1_G)^{-1} = f(1_G)$$

となるので、$f(1_G) = 1_{G'}$ が成り立つ。

### 問題 2

$f : G \to G'$ を準同型写像とするとき

$$G \ni^{\forall} a \text{ に対して } f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

であることを示せ。

**解答**

$$f(1_G) = f(a \cdot a^{-1}) = f(a) \cdot f(a^{-1})$$

$$f(1_G) = 1_{G'} = f(a) \cdot f(a)^{-1}$$

よって

$$f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(a) \cdot f(a)^{-1}$$

となる。両辺の左から $f(a)^{-1}$ をかけて、

$$f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \cdot f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \cdot f(a) \cdot f(a)^{-1} = f(a)^{-1}$$

となる。よって

$$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

**問題３**

整数環 $Z$ の剰余群 $Z/3Z$、$Z/6Z$ に対して

$$\begin{array}{rcc} f : Z/6Z & \to & Z/3Z \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$

という写像を定義する。このとき

1. 準同型写像であることを示せ。
2. 全射であることを示せ。
3. $\mathrm{Ker} f$ をみつけよ。

**解答**

$f$ は以下のような $Z/6Z$ から $Z/3Z$ への写像である。

$$\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6Z & 6Z+1 & 6Z+2 & 6Z+3 & 6Z+4 & 6Z+5 \\ 3Z & 3Z+2 & 3Z+1 & 3Z & 3Z+2 & 3Z+1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(1)
$p, q \in Z/6Z$ に対して

$$f(pq) = f(p)f(q)$$

を示せばよい。(あきらめ)
(2)
式 (1) より、$f$ の値域に $3Z, 3Z+1, 3Z+2$ がすべて含まれるので全射である。

(3)

$Z/3Z$ の単位元は $3Z$。式 (1) より、

$$f(6Z) = 3Z$$

$$f(6Z+3) = 3Z$$

であるので、$\mathrm{Ker} f = \{6Z, 6Z+3\}$

#### 問題 4

$M_n(Z)$ が環であることを示せ。

#### 解答

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

とする。

環であることを示すには、

1. 加法に関して可換群となる。
2. 乗法に関する結合律を満たす。
3. $a(b+c) = ab + ac$ および $(b+c)a = ba + bc$ を満たす。
4. 乗法に関する単位元を持つ。

を示せばよい。

**加法に関して可換群となる** 加法に関して可換群であることを示すには、

1. 加法に関して閉じている。
2. 加法が結合律を満たす。
3. 加法に関する単位元を持つ。
4. 加法に関する逆元を持つ。
5. 加法に関して交換律を満たす。

を示せばよい。

**加法に関して閉じている**

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(Z)$$

**加法が結合律を満たす**

$$(A+B)+C = A+(B+C) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1}+c_{n1} & a_{n2}+b_{n2}+c_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn}+c_{nn} \end{pmatrix}$$

**加法に関する単位元をもつ**

$$0_{M_n(Z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

が

$$A + 0_{M_n(Z)} = 0_{M_n(Z)} + A = A$$

を満たすので、加法に関する単位元となる。

**加法に関する逆元をもつ** $A$ に対して、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$A + A^{-1} = A^{-1} + A = 0_{M_n(Z)}$$

を満たすので、加法に関する逆元となる。

**加法に関して交換律を満たす**

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

よって、$M_n$ は加法に関して可換群である。

**乗法に関して結合律を満たす**

$(AB)C =$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{ni}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}b_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1i}b_{ij}c_{j1} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1i}b_{ij}c_{j2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1i}b_{ij}c_{jn} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{2i}b_{ij}c_{j1} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{2i}b_{ij}c_{j2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{2i}b_{ij}c_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ni}b_{ij}c_{j1} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ni}b_{ij}c_{j2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ni}b_{ij}c_{jn} \end{pmatrix}$$

$A(BC)$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_{1i}c_{i1} & \sum_{i=1}^n b_{1i}c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n b_{1i}c_{in} \\ \sum_{i=1}^n b_{2i}c_{i1} & \sum_{i=1}^n b_{2i}c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n b_{2i}c_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_{ni}c_{i1} & \sum_{i=1}^n b_{ni}c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n b_{ni}c_{in} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1i}b_{ij}c_{j1} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1i}b_{ij}c_{j2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1i}b_{ij}c_{jn} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{2i}b_{ij}c_{j1} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{2i}b_{ij}c_{j2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{2i}b_{ij}c_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ni}b_{ij}c_{j1} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ni}b_{ij}c_{j2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ni}b_{ij}c_{jn} \end{pmatrix}$$

よって、

$$(AB)C = A(BC)$$

**分配法則を満たす**

$A(B+C)$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1}+c_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^n a_{1i}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}(b_{in}+c_{in}) \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^n a_{2i}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}(b_{in}+c_{in}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i=1}^n a_{ni}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}(b_{in}+c_{in}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (a_{1i}b_{i1}+a_{1i}c_{i1}) & \sum_{i=1}^n (a_{1i}b_{i2}+a_{1i}c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^n (a_{1i}b_{in}+a_{1i}c_{in}) \\ \sum_{i=1}^n (a_{2i}b_{i1}+a_{1i}c_{i1}) & \sum_{i=1}^n (a_{2i}b_{i2}+a_{1i}c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^n (a_{2i}b_{in}+a_{1i}c_{in}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n (a_{ni}b_{i1}+a_{1i}c_{i1}) & \sum_{i=1}^n (a_{ni}b_{i2}+a_{1i}c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^n (a_{ni}b_{in}+a_{1i}c_{in}) \end{pmatrix}$$

$AB + AC$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{in} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{ni}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}b_{in} \end{pmatrix}$$

$$
+\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_{in} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}c_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}c_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}c_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}c_{in} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(a_{1i}b_{i1}+a_{1i}c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n}(a_{1i}b_{i2}+a_{1i}c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n}(a_{1i}b_{in}+a_{1i}c_{in}) \\ \sum_{i=1}^{n}(a_{2i}b_{i1}+a_{1i}c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n}(a_{2i}b_{i2}+a_{1i}c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n}(a_{2i}b_{in}+a_{1i}c_{in}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}(a_{ni}b_{i1}+a_{1i}c_{i1}) & \sum_{i=1}^{n}(a_{ni}b_{i2}+a_{1i}c_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n}(a_{ni}b_{in}+a_{1i}c_{in}) \end{pmatrix}
$$

よって、

$$A(B+C)=AB+AC$$

同様にして

$$(B+C)A=BA+BC$$

**乗法に関する単位元をもつ**

$$
1_{M_n(Z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

とすると、

$$A1_{M_n(Z)} = 1_{M_n(Z)}A = A$$

を満たすので、$1_{M_n}$ は乗法に関する単位元となる。

よって、$M_n(Z)$ は環である。

## 問題５

$R$ を環とするとき、

$$aR = \{ar|r \in R\}$$

は $R$ のイデアルになることを示せ。

## 解答

$r_1, r_2 \in R$ とすると、$r_1 + r_2 \in R$ および $r_1 r_2 \in R$ であるので、

$$ar_1 + ar_2 = a(r_1 + r_2) \in aR$$

かつ

$$(ar_1)r_2 = a(r_1 r_2) \in aR$$

よって $aR$ は $R$ のイデアルである。