離散数学レポート

010119:大和谷 潔

平成 12 年 7 月 25 日

問題 1

1. $Z/6Z$ の加法と乗法の表をつくれ。
2. 零因子をもとめよ。
3. 正則元 $\overline{U}(Z/6Z)$ を求めよ。

解答

(1)
加法に関する表はつぎのとおり。

$+$	$6Z$	$6Z+1$	$6Z+2$	$6Z+3$	$6Z+4$	$6Z+5$
$6Z$	$6Z$	$6Z+1$	$6Z+2$	$6Z+3$	$6Z+4$	$6Z+5$
$6Z+1$	$6Z+1$	$6Z+2$	$6Z+3$	$6Z+4$	$6Z+5$	$6Z$
$6Z+2$	$6Z+2$	$6Z+3$	$6Z+4$	$6Z+5$	$6Z$	$6Z+1$
$6Z+3$	$6Z+3$	$6Z+4$	$6Z+5$	$6Z$	$6Z+1$	$6Z+2$
$6Z+4$	$6Z+4$	$6Z+5$	$6Z$	$6Z+1$	$6Z+2$	$6Z+3$
$6Z+5$	$6Z+5$	$6Z$	$6Z+1$	$6Z+2$	$6Z+3$	$6Z+5$

乗法に関する表はつぎのとおり。

$\times$	$6Z$	$6Z+1$	$6Z+2$	$6Z+3$	$6Z+4$	$6Z+5$
$6Z$	$6Z$	$6Z$	$6Z$	$6Z$	$6Z$	$6Z$
$6Z+1$	$6Z$	$6Z+1$	$6Z+2$	$6Z+3$	$6Z+4$	$6Z+5$
$6Z+2$	$6Z$	$6Z+2$	$6Z+4$	$6Z$	$6Z+2$	$6Z+4$
$6Z+3$	$6Z$	$6Z+3$	$6Z$	$6Z+3$	$6Z$	$6Z+3$
$6Z+4$	$6Z$	$6Z+4$	$6Z+2$	$6Z$	$6Z+4$	$6Z+2$
$6Z+5$	$6Z$	$6Z+5$	$6Z+4$	$6Z+3$	$6Z+2$	$6Z+1$

(2)

加法に関する単位元は $0 = 6Z$ である。

$$ab = 0$$

とする 0 以外の $b \in Z/6Z$ をもつ元 $a \in Z/6Z$ を求める。

$$6Z(6Z+1) = 6Z$$

$$(6Z+2)(6Z+3) = 6Z$$

$$(6Z+3)(6Z+4) = 6Z$$

$$(6Z+4)(6Z+3) = 6Z$$

であるので、

$$\text{零因子} = \{6Z, 6Z+2, 6Z+3, 6Z+4\}$$

である。

(3)

乗法に関する単位元は $1 = 6Z+1$ である。

$$ab = ba = 1$$

とする $b \in Z/6Z$ が存在する元 $a \in Z/6Z$ を求める。

$$(6Z+1)(6Z+1) = 6Z+1$$

$$(6Z+5)(6Z+5) = 6Z+1$$

であるので、

$$\text{正則元} = \{6Z+1, 6Z+5\}$$

である。

問題 2

剰余環

$$Z/mZ \qquad (m > 1)$$

において以下を示せ。

1. Z/mZ が 0 とは異なる零因子をもつ $\Leftrightarrow$ m は合成数
2. $\overline{U}(Z/mZ) = Z/mz\backslash\{0\} \Leftrightarrow$ m は素数

解答

(1)

Z/mZ において、$0 = mZ$ である。

Z/mZ が、0 とは異なる零因子をもつとすると、

$$(mZ + a)(mZ + b) = mZ$$

である $0 < a, b \leq m - 1$ が存在する。このとき、ある $p, q, r \in Z$ が存在して

$$(mp + a)(mq + b) = mr$$

が成り立つ。これを変形すると、

$$m(r - mpq - pb - qa) = ab$$

が得られる。(あきらめ)

逆に、m が合成数であるとすると、ある $p, q \in N$ について

$$m = pq \text{ かつ } 1 < p, q < m$$

が成り立つ。このとき、$pqZ + p, pqZ + q \in Z/mZ$ を考えると、任意の整数 x, y について

$$pqx + p \in pqZ + p \text{ かつ } pqy + q \in pqZ + q$$

が成り立ち、

$$(pqx + p)(pqy + q) = pq(pqxy + xb + ya + 1) \in pqZ$$

が成り立つ。ここで、Z/mZ の単位元は pqZ であるので、$pqZ + p, pqZ + q$ は零因子となる。よって、m が合成数ならば、Z/mZ は 0 とは異なる零因子をもつ。

(2)

(あきらめ)