

離散数学レポート

010119:大和谷 潔

平成12年7月26日

問題1

つぎの不定方程式を解け。

1. $13X + 17Y = 1$

2. $19X + 5Y = 1$

解答

(1)

$$13X + 17Y = 13(X + Y) + 4Y \quad (1)$$

$$Z = X + Y \text{ として} \quad (2)$$

$$= 13Z + 4Y \quad (3)$$

$$= 4(Y + 3Z) + Z \quad (4)$$

$$W = Y + 3Z \text{ として} \quad (5)$$

$$= 4W + Z = 1 \quad (6)$$

ここで $W = t$ として、(6) に代入すると $4t + Z = 1$ となり、 $Z = 1 - 4t$ をえる。

これらを (5) に代入し、 $t = Y + 3(1 - 4t)$ を得て、 $Y = 13t - 3$ を得る。

さらに (2) より、 $1 - 4t = X + (13t - 3)$ となり、 $X = -17t + 4$ が得られる。

よって、一般解

$$(X, Y) = (-17t + 4, 13t - 3)$$

を得る。

(2)

$$19X + 8Y = 3X + 8(2X + Y) \quad (1)$$

$$Z = 2X + Y \text{ として} \quad (2)$$

$$= 3X + 8Z \quad (3)$$

$$= 3(X + 2Z) + 2Z \quad (4)$$

$$W = X + 2Z \text{ として} \quad (5)$$

$$= 3W + 2Z \quad (6)$$

$$= 2(2W + Z) + W \quad (7)$$

$$V = Z + W \text{ として} \quad (8)$$

$$= 2V + W = 1 \quad (9)$$

$V = t$ において (9) に代入すると $2t + W = 1$ となり、 $W = 1 - 2t$ を得る。

これらを (8) に代入して、 $t = Z + (1 - 2t)$ となり、 $Z = 3t - 1$ を得る。

さらに (5) は $1 - 2t = X + 2(3t - 1)$ となり、 $X = 3 - 8t$ を得る。

そして (2) は $3t - 1 = 2(3 - 8t) + Y$ となり、 $Y = 19t - 7$ を得る。

よって、一般解

$$(X, Y) = (3 - 8t, 19t - 7) \quad t \text{ は任意}$$

を得る。

問題 2

つぎの合同式の解を求めよ。

$$3x \equiv 5 \pmod{17}$$

解答

$$3X \equiv 5 \pmod{17} \quad (1)$$

$$17X \equiv 17 \pmod{17} \quad (2)$$

(2) - (1) より

$$14X \equiv 12 \pmod{17} \quad (3)$$

$(2, 17) = 1$ だから両辺を 2 で割って

$$7X \equiv 6 \pmod{17} \quad (4)$$

(4) - (1) より

$$4X \equiv 1 \pmod{17} \quad (5)$$

(5) - (1) より

$$X \equiv -4 \pmod{17} \quad (6)$$

よって、

$$X \equiv -4 \pmod{17}$$

問題3

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

を求めよ。

解答

$x \equiv 4 \pmod{7}$ より、

$$x = 7t + 4 \quad (1)$$

とおける。これを $x \equiv 2 \pmod{5}$ に代入して、

$$7t + 4 \equiv 2 \pmod{5}$$

両辺より 4 を引いて

$$7t \equiv -2 \pmod{5} \quad (2)$$

また、 $7 \equiv 2 \pmod{5}$ より

$$7t \equiv 2t \pmod{5}$$

であるので、これを (2) の左辺に用いて

$$2t \equiv -2 \pmod{5}$$

両辺に 3 をかけて

$$6t \equiv -6 \pmod{5} \quad (3)$$

(2) - (3) より

$$t \equiv 4 \pmod{5} \quad (4)$$

よって $t = 4 + 5u$ と表せる。

これを (1) に代入して

$$x = 35u + 32$$

よって

$$x \equiv 32 \pmod{35} \quad (5)$$

問題 4

$$\left(\frac{11}{77}\right)$$

を求めよ。

解答

$\gcd(11, 77) \neq 1$ なので、 $\left(\frac{11}{77}\right) = 0$