I118 グラフとオートマトン理論
Graphs and Automata

担当: 上原 隆平(Ryuhei UEHARA)

uehara@jaist.ac.jp

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/

3. 関数
Function

3.1 関数とその記法

- **関数(Function)**
  - 集合 *A*, *B* が与えられたとき, *A* のそれぞれの要素から*B*の「ただ一つの」要素への対応.

$$f : A \to B$$

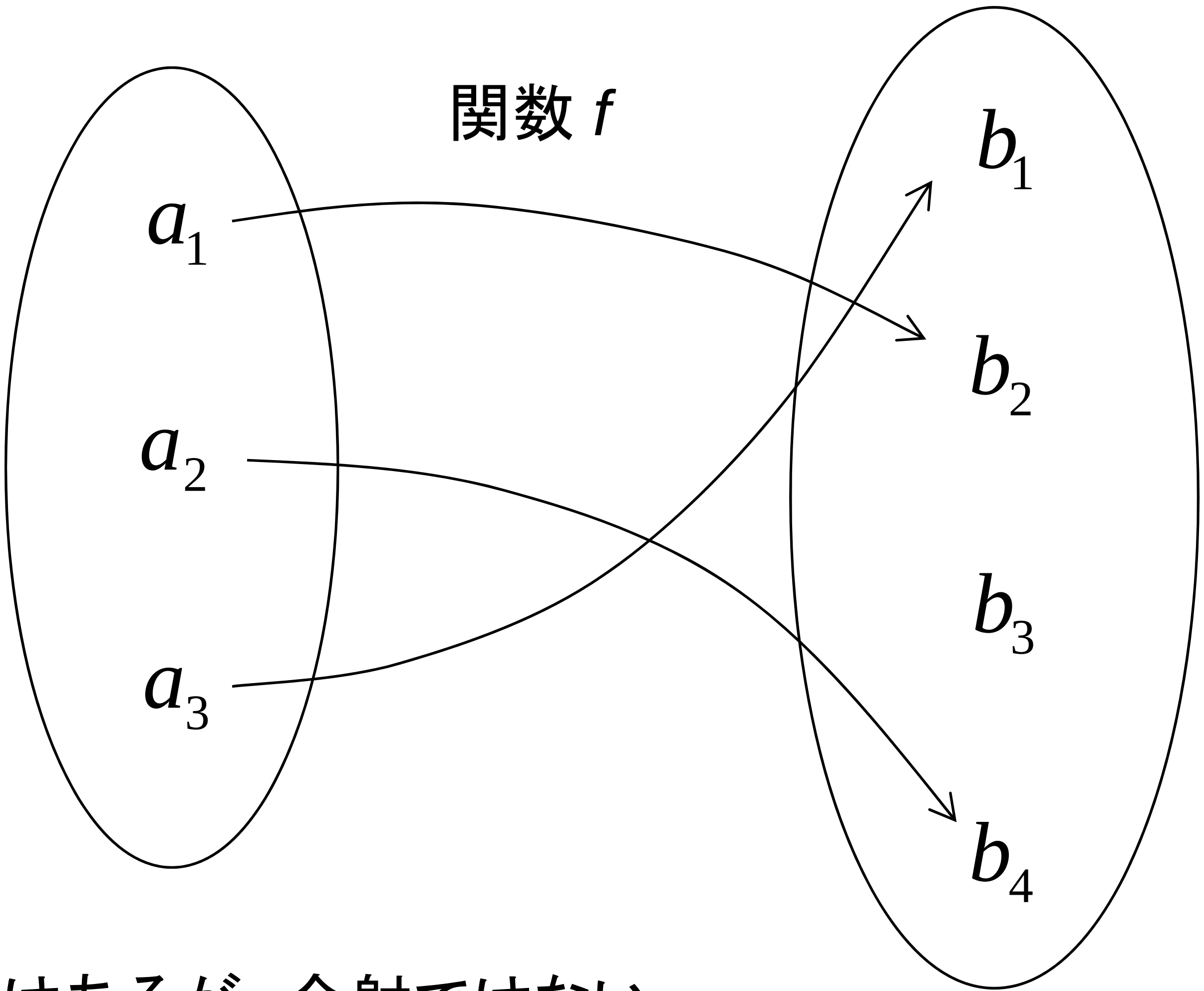
    - *A*: **定義域(Domain)**
    - *B*: **値域(Range)**
  - 関数 $f, a \in A$ に対して, $f(a)\,(=b)$ を**関数値**または**像**とよび, $f : a \mapsto b$ と書く.

3.2 対応の種類

- $f : A \to B$ とする.
  - **<u>単射</u>（一対一の関数）** … $a_1, a_2 \in A$ に対して, $a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$ となるとき.
  - **<u>全射</u>（上への関数）** … 任意の $b \in B$ において, $f(a) = b$ となる $a \in A$ が存在するとき.
  - **<u>全単射</u>** … 全射かつ単射
- **<u>恒等関数</u>** $I : A \to A$
  - 任意の $a \in A$ について, $I(a) = a$

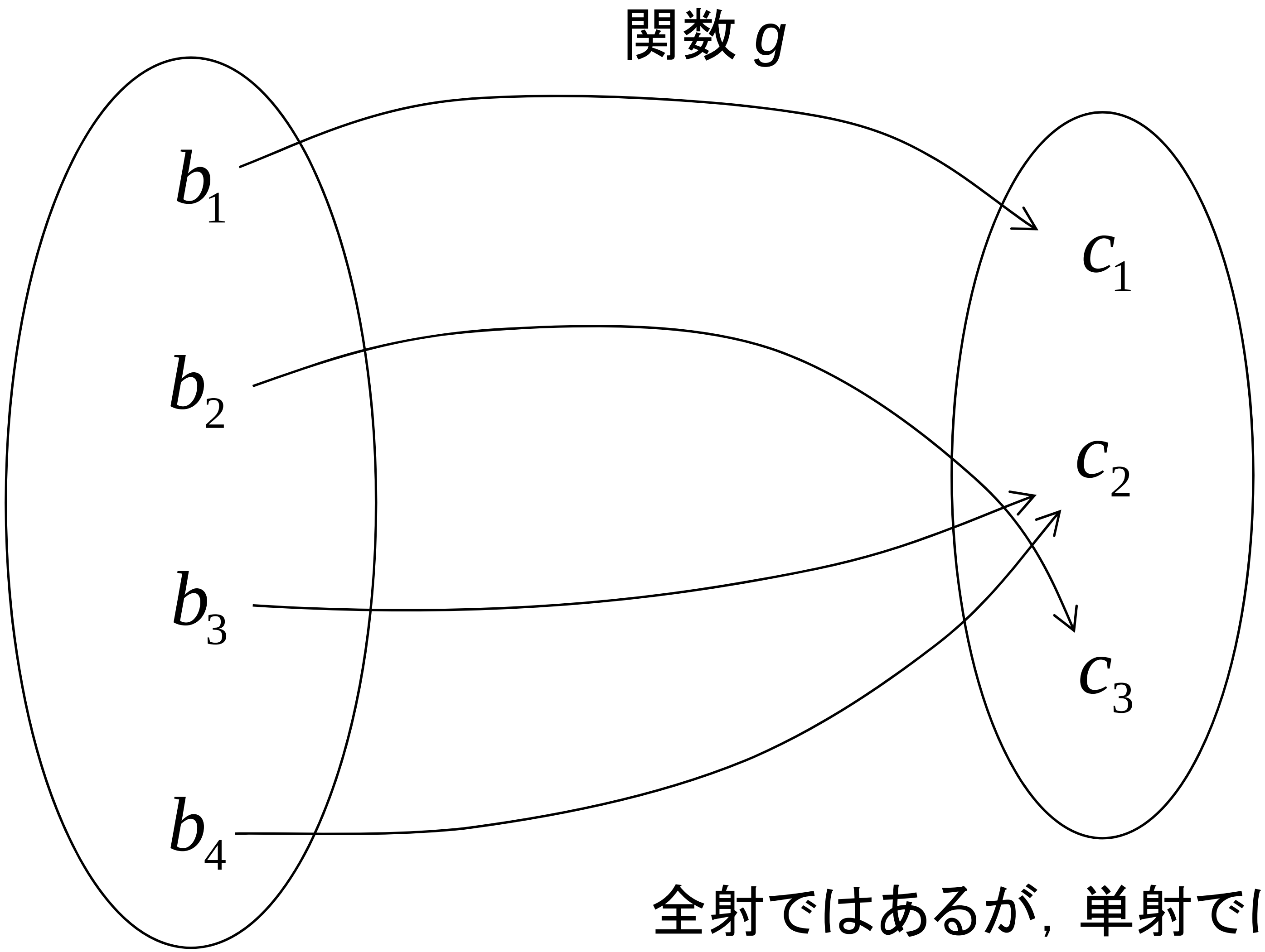
全単射を「一対一の関数」という文献もある。

単射関数の例



単射ではあるが，全射ではない

全射関数の例

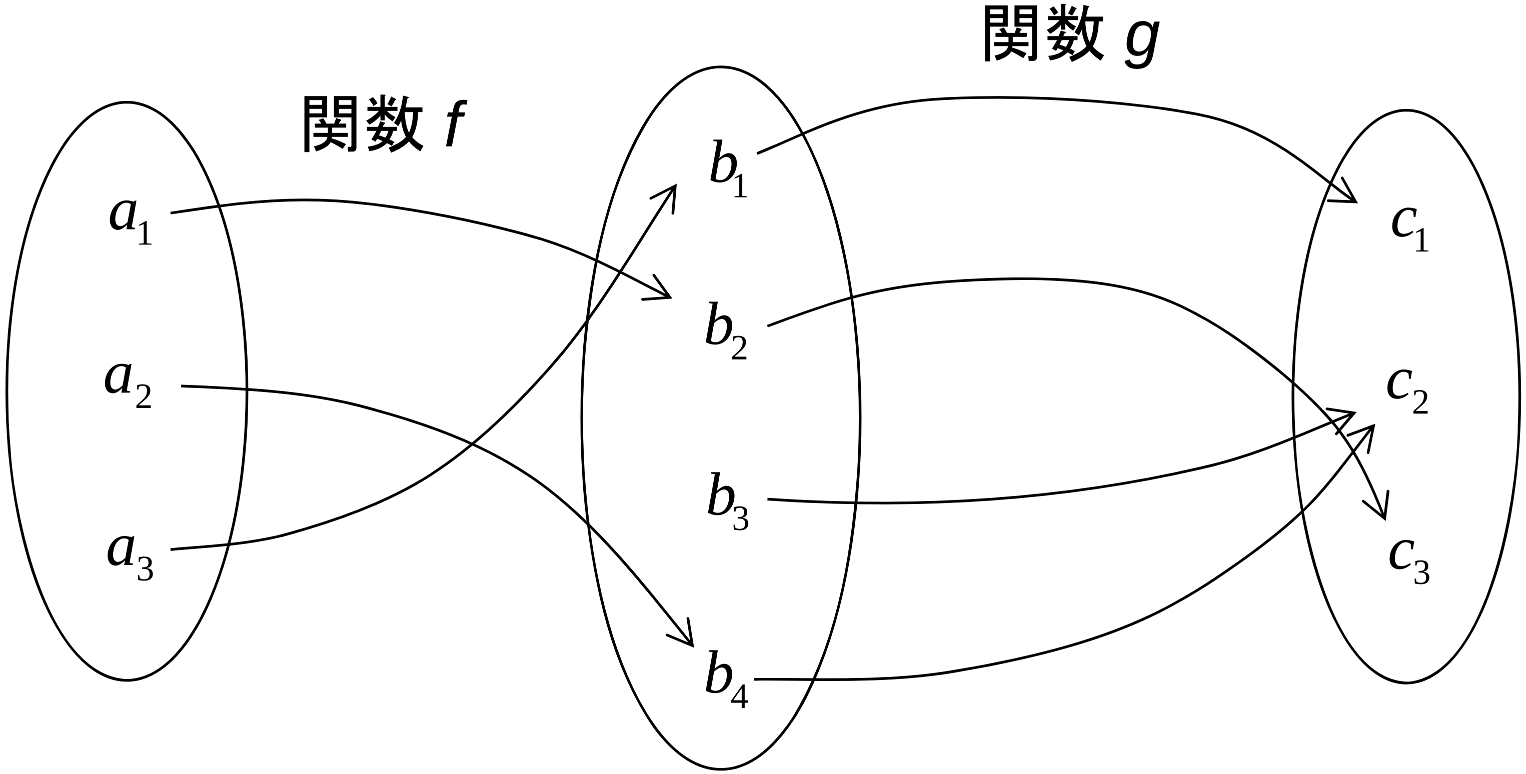


全射ではあるが，単射ではない

3.3 関数の合成

- 前提:
  - 集合 *A*, *B*, *C* と関数 $f: A \to B,\ g: B \to C$
- このとき，対応 $g(f(a)) = h(a)$ により，関数 $h: A \to C$ を定義することができる.
- h … f, g の<u>**合成**</u>
  - $h = g \circ f$ と書く.

関数の合成の例



合成関数: $h = g \circ f$

この例では f も g も全単射では
ないが、 $g \circ f$ は全単射。

3.4 逆関数

- 定理: $f: A \to B$ が全単射であるとき, $g: B \to A$ なる関数 g で, $g \circ f = f \circ g = I$ を満たすものが唯一つ存在する.
  - 証明: f は全単射であるから, 任意の $b \in B$ について, $b = f(a)$ となる $a \in A$ が一意に定まる. この対応を g とすると,

$$f \circ g(b) = f(g(b))$$

$$= f(a) = b$$

- このような g を f の<u>**逆関数**</u>といい, $g = f^{-1}$ と書く.

4. 集合と関係
Set & Relation

4.1 関係の概念

- 関係の概念の例： 年上という関係 Older
  - 父は兄より年上である
  - 父は弟より年上である
  - 兄は弟より年上である
- これを素朴に表すとしたら…
  - Older = {(父, 兄), (父, 弟) , (兄, 弟)}
- [注] 集合の内包的定義 $\{x|P(x)\}$ … 性質 $P(x)$ を満たす x の集合
- x は y より年上である ⇔ $(x, y) \in$ Older

4.2 関係の定義

- 集合A における (2項) <u>**関係**</u> R … 直積 $A \times A$ の部分集合
$$R \subseteq A \times A$$
- $(a,b) \in R$ のとき，便宜的に aRb と表記する.

4.3 順序関係

- A における関係 R が以下の性質を満たすとき，R を（半）<u>**順序関係**</u>といい，(A, R) を(半) <u>**順序集合**</u>という.
  - <u>**反射的**</u> … ${}^\forall a \in A\left[aRa\right]$
  - <u>**反対称的**</u> … ${}^\forall a,b \in A\left[aRb \wedge bRa \rightarrow a=b\right]$
  - <u>**推移的**</u> … ${}^\forall a,b,c \in A\left[aRb \wedge bRc \rightarrow aRc\right]$

順序関係の例

- 例:

$| = \{(a,b) \mid a,b \in N - \{0\}, a$は$b$を割切ることができる$\}$

  - 反射性 … $a | a$ は成立
  - 反対称性 … $(a,b) \in | \wedge (b,a) \in |$

$$\rightarrow {}^{\exists}h, g\ [b = a \times h \wedge a = b \times g]$$

$$\rightarrow a = a \times h \times g$$

$$\rightarrow h = g = 1$$

$$\rightarrow a = b$$

  - 推移性も成立

4.4 全順序関係

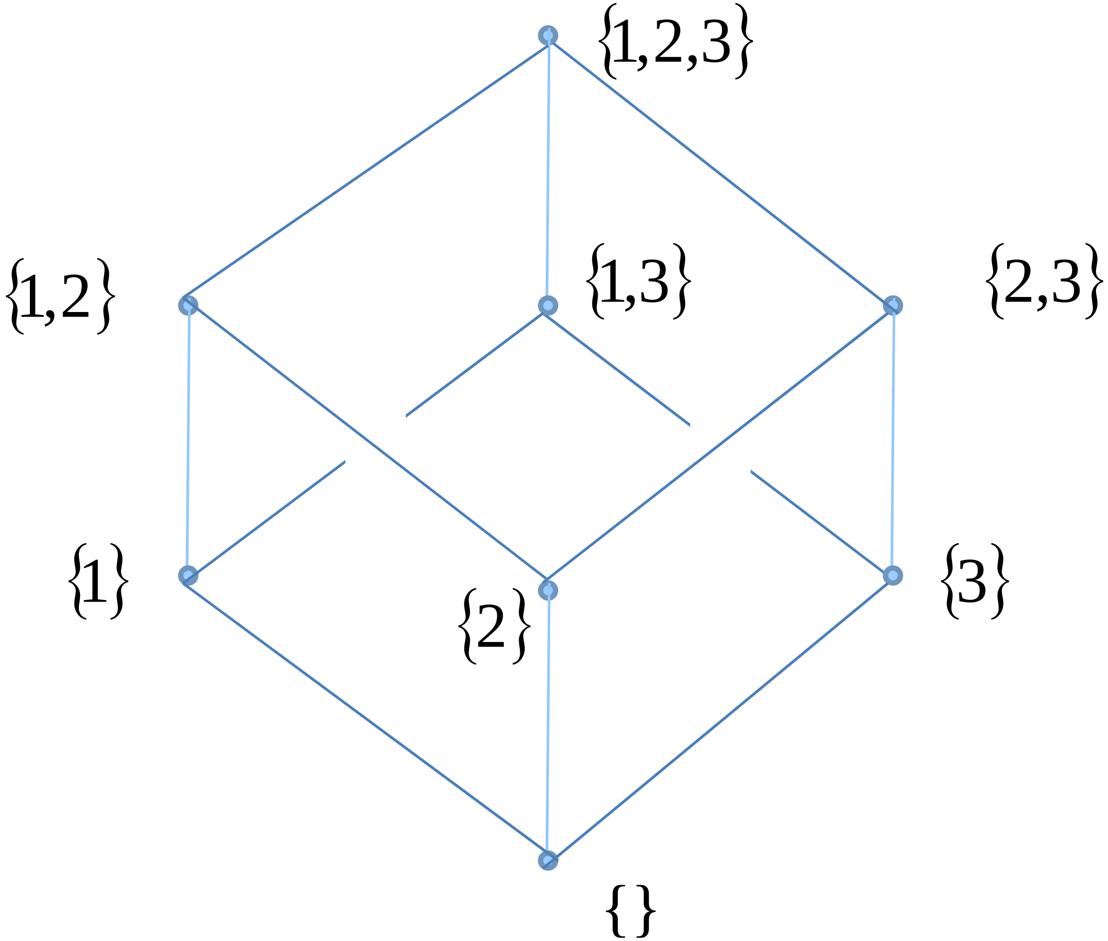
- 半順序集合 (A, R) が，加えて
  - **<u>比較可能性</u>**

$$^{\forall}a, b \in A\left[aRb \vee bRa\right]$$

の性質を持つとき，<u>全順序関係</u>（集合）であるという.

4.5 ハッセ図

- $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ のハッセ図



4.6 同値関係

- A における関係 R が以下の性質を満たすとき，R を<u>**同値関係**</u>という.
  - <u>**反射的**</u> … $\forall a \in A[aRa]$
  - <u>**対称的**</u> … $\forall a, b \in A[aRb \rightarrow bRa]$
  - <u>**推移的**</u> … $\forall a, b, c \in A[aRb \wedge bRc \rightarrow aRc]$

同値関係Rにおいて，aRb のとき，a, b は<u>**同値である**</u>という

同値類

- ある要素に同値な要素の集合を，**<u>同値類</u>**という．同値関係 R における，$a \in A$ の同値類 $[a]_R$ は以下のように定義される．

$$[a]_R = \{b \mid b \in A, bRa\}$$

同値類の例

- $R = \{(a, b) \mid a, b \in N \wedge a + b$ は偶数$\}$
  - R は明らかに同値関係
  - $[3]_R = \{1, 3, 5, \ldots\}$
  - $[4]_R = \{0, 2, 4, \ldots\}$
  - $[5]_R = \{1, 3, 5, \ldots\}$
- これより，非負の偶数のすべての集合を $E = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, 非負の奇数のすべての集合を $O = \{1, 3, 5, \ldots\}$ とすると，
  - $[1]_R = [3]_R = [5]_R = \cdots = O$
  - $[0]_R = [2]_R = [4]_R = \cdots = E$

商集合

- 集合 A の同値関係 R によるすべての同値類からなる集合を，<u>**商集合**</u>といい，A/R と書く．すなわち，

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

- 例．前ページの例では，

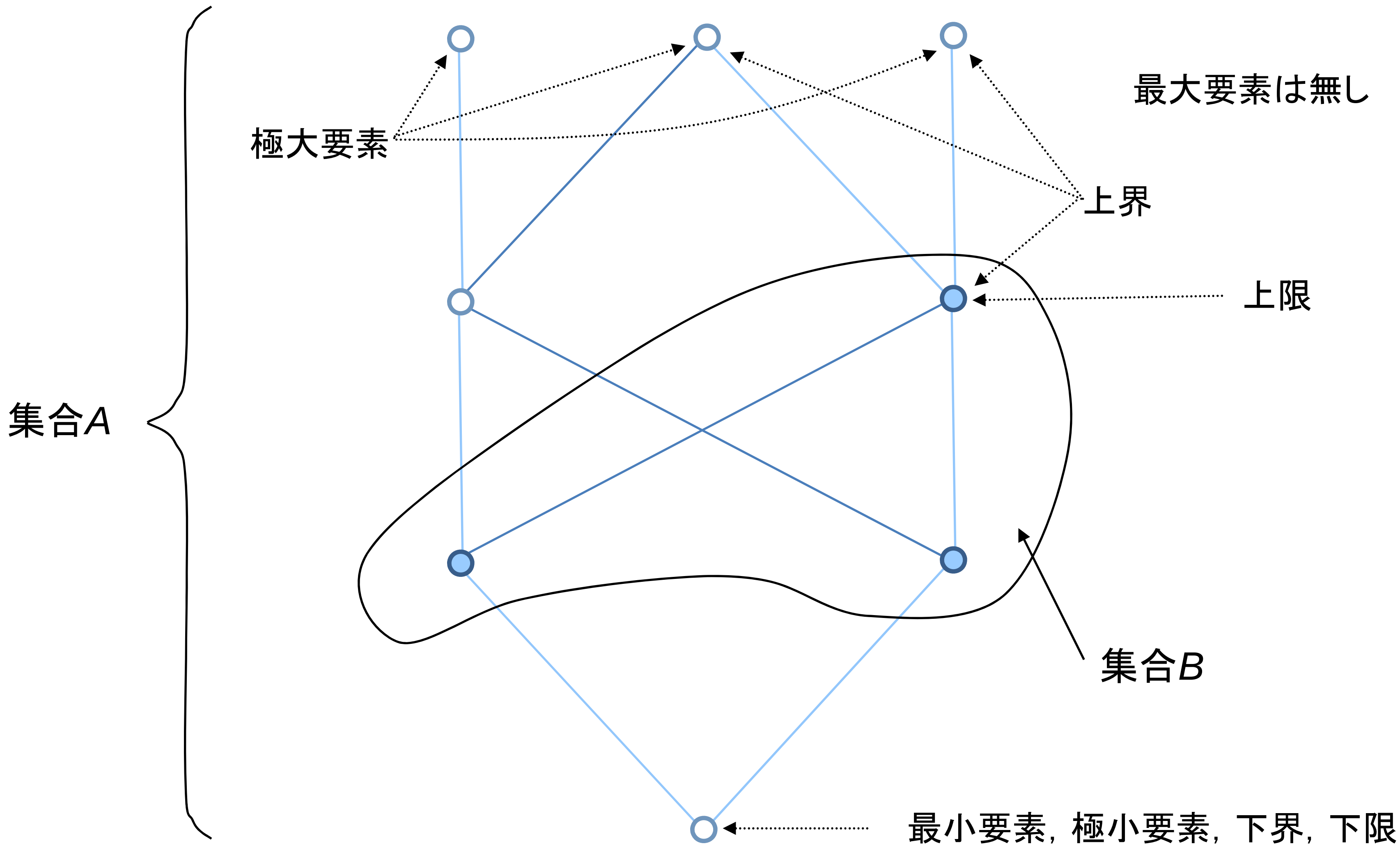
$$N/R = \{E, O\}$$

4.7 順序集合における「最大最小」の概念

- (A, R) が順序集合であるとする
  - **<u>最大要素(maximum)</u>** … $x \in A$
    任意の $y \in A$ について yRx
  - **<u>最小要素(minimum)</u>** … $x \in A$
    任意の $y \in A$ について xRy
  - **<u>極大要素(maximal)</u>** … $x \in A$
    xRy かつ $x \neq y$ を満たすような $y \in A$ が存在しない
  - **<u>極小要素(minimal)</u>** … $x \in A$
    yRx かつ $x \neq y$ を満たすような $y \in A$ が存在しない

- さらに，$B \subseteq A$なるBにおける関係Rについて考える．
  - <u>**上界**</u> … $x \in A$
    任意の$y \in B$ について，yRx
  - <u>**上限**</u> … $x \in A$
    上界すべての集合の最小要素．sup B と書く．
  - <u>**下界**</u> …$x \in A$
    任意の $y \in B$ について，xRy
  - <u>**下限**</u> … $x \in A$
    下界すべての集合の最大要素．inf B と書く．

最大最少／極大極小／上界下界の例

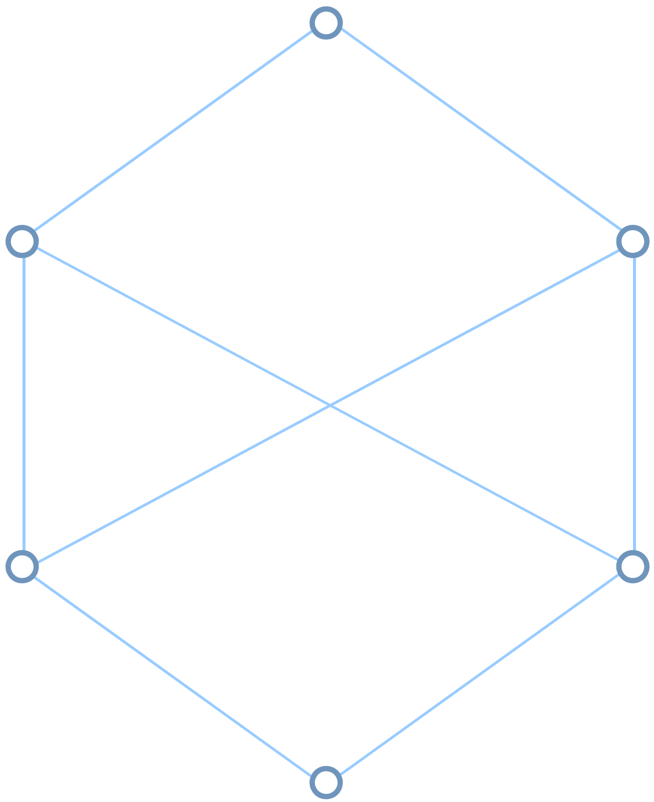


4.8 束

- 順序集合 (A, R) が任意の要素 $x, y \in A$ について上限と下限を持つとき，(A, R) は<u>束</u>であるという.
  – 例： 4.5 の図における順序集合（2^A, $\subseteq$）は，束である

問題

- 以下のハッセ図で表される順序集合は束か？



4.9 結び，交わり

- (A, R) が束であるとき，
  - 結び $a + b$ … $\{a, b\}$の上限
  - 交わり $a \cdot b$ … $\{a, b\}$の下限

- 結び，交わりの性質：
  - 結合律
    $a + (b + c) = (a + b) + c$
    $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
  - 交換律
    $a + b = b + a$
    $a \cdot b = b \cdot a$
  - べき等律
    $a + a = a$
    $a \cdot a = a$
  - 吸収律
    $a + (a \cdot b) = a$
    $a \cdot (a + b) = a$